21/04/16

▶ Έστω $(V, <,>)$ ΧΕΓ πεπερασμένης διάστασης W υπόχωρος του V και $g_1, \dots g_p$ βάση του W, με Gram-Schmidt στο $g_1, \dots, g_p$ βρίσκουμε ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_p$ του W.

ΕΡΩΤΗΜΑ 1 Να επεκταθεί το $e_1, \dots, e_p$ σε ορθοκανονική βάση $e_1, \dots e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$

ΕΡΩΤΗΜΑ 2 Να υπολογιστεί ο $W^\perp = \{v \in V \ <v, w> = 0 \ \forall \ w \in W\}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 1: Έχουμε $e_1, \dots e_p$ γραμμ. ανεξ. Χρησιμοποιώντας ΓΡ1 επεκτείνουμε σε βάση $e_1, \dots, e_p, w_{p+1}, \dots, w_n$ του V. Μετά εφαρμόζουμε Gram-Schmidt στο $e_1, \dots, e_p, w_{p+1}, \dots, w_n$. Τα $e_1, \dots e_p$ δεν αλλάζουν. Το αποτέλεσμα της Gram-Schmidt είναι ορθοκανονική βάση $e_1, \dots, e_p, e_{p+1}, \dots, e_n$ του V που επεκτείνει την $e_1 \dots, e_p$.

ΑΠΑΝΤΗΣΗ 2: Εύκολα βλέπουμε ότι $W^\perp = <e_{p+1}, \dots, e_n>$ αρκεί να λύσουμε το Ερωτ. 1 (και μάλιστα $e_{p+1} \dots e_n$ ορθοκανονική βάση $W^\perp$)

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 9 #1

ΛΥΣΗ

Gram-Schmidt στο v_1, v_2

ΒΗΜΑ 1° Gram-Schmidt στο v_1, v_2. Έστω είναι γραμμ. ανεξάρτητα, οπότε για να βρούμε ορθοκανονική βάση e_1, e_2 του W

$$h_1 = v_1$$

$$h_2 = v_2 - \frac{<v_2, h_1>}{\|h_1\|^2} h_1,$$

$$\rightarrow e_1 = \frac{h_1}{\|h_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0\right)$$

$$\rightarrow e_2 = \frac{h_2}{\|h_2\|} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, -\frac{\sqrt{2}}{6}, 0, \frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$$

Τα e_1, e_2 ορθοκ. βάση του W

ΒΗΜΑ 2° Επέκταση σε βάση του V. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} & -\frac{\sqrt{2}}{2 \cdot 3} & 0 & \frac{2\sqrt{2}}{3} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 6 \end{bmatrix}$ μετά(?) (σχεδόν κλιμακωτός)

Άρα από Θεώρ. Αγ 1 $e_1, e_2, w_3 = (0,0,1,0)$

$w_4 = (0,0,0,1)$

ΒΗΜΑ 3° Gram-Schmidt στη βάση e_1, e_2, w_3, w_4 του V. Μετά τις πράξεις παίρνουμε ορθοκαν. βάση $e_1, e_2, e_3=(0,0,1,0)$, $e_4=\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$

ΑΡΑ $\Rightarrow W^{\perp}=\langle e_3, e_4\rangle$ και e_3, e_4 ορθοκαν. βάση του $W^{\perp}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n\times 1}$ είναι το

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} \right\rangle = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n$$

Με άλλα λόγια, αν $v, w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ τότε $\boxed{\langle v, w\rangle = Tr(w^t v)}$

γιατί αν $v=\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $w=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$, $w^t=[u_1 \dots u_n]$, $w^t v=$

$$= \begin{bmatrix} x_1u_1 & & \\ * & x_2u_2 & * \\ & & \ddots \ x_nu_n \end{bmatrix}$$

και Tr (τετραγωνικό πίνακα) = άθροισμα διαγωνίων στοιχείων

Το κανονικό εσωτ. γινόμενο στο $\mathbb{R}^{1\times n}$ είναι $\langle (x_1 \dots x_n), (u_1 \dots u_n)\rangle = x_1u_1 + \dots + x_nu_n$.

*Διόρθωση

Αν $v=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$w=\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

τότε $Tr(\underset{1\times n}{w^t}\underset{n\times 1}{v})=$

$= Tr\left((u_1, \dots u_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)=$

$= Tr([u_1x_1 + \dots + u_nx_n])$

$= x_1u_1 + \dots + x_nu_n$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Ο A λέγεται ΟΡΘΟΓΩΝΙΟΣ αν $\langle Av, Aw\rangle = \langle v, w\rangle \ \forall v, w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ όπου $\langle\ \rangle$ είναι το κανονικό εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}^{n\times 1}$ (και Av γινόμενο πινάκων).

▲ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ΤΑΕΙ

(i) A ορθογώνιος

(ii) A αντιστρέψιμος με αντίστροφο $A^{-1}=A^t$

(iii) $A^tA = AA^t = I_n$

(iv) $A^tA = I_n$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Φανερά (ii) ισοδύναμο με (iii)

Φανερά (iii) $\Rightarrow$ (iv)

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Από ΠΡ1 είδαμε ότι αν $A,B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ η συνθήκη $AB=I_n$ συνεπάγεται την $BA=I_n$ $(AB=BA=I_n)$

→ Υποθέτουμε (i) Άρα $\langle Av, Aw\rangle = \langle v,w\rangle \ \forall \ v,w \in \mathbb{R}^{n\times 1} \Leftrightarrow$

$Tr(Av)^t(Av) = Tr(w^t v)$ -//-

$\Leftrightarrow Tr(w^t(A^tA)v) = Tr(w^t v)$ -//- (*)

→ Υποθέτουμε (iv) Τότε $A^tA=I_n \overset{(*)}{\Longrightarrow} \langle Av, Aw\rangle = \langle v,w\rangle \ \forall v,w$ δηλ. A ορθογώνιος.

→ Υποθέτουμε (i) Άρα $Tr(w^t(A^tA)v) = Tr(w^t v) \ \forall \ v,w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$

ΘΔΟ $A^tA=I_n$

Αυτό προκύπτει από το εξής γενικά

(Έστω $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v,w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ ώστε $\left[\begin{array}{l} w \text{ έχει } 1 \text{ στην } (i,1) \text{ θέση και } 0 \text{ παντού αλλού} \\ v \text{ έχει } 1 \text{ στην } (j,1)\text{-θέση} \text{ -//-} \end{array}\right.$

ΤΟΤΕ

w^tCv είναι 1×1 πίνακας με μοναδικό το στοιχείο που είναι στη (i,j) θέση του C. Π.χ. $(0,1)\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{21} & c_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0\end{bmatrix} = c_{21}$)

ΑΡΑ A ορθογώνιος $\Leftrightarrow$ A αντιστρ. και ο αντίστροφος είναι ο ανάστροφος

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$A=I_n$ $A^t=I_n$ και $AA^t=I_nI_n=I_n$ Άρα A ορθογώνιος. Έστω $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ Τότε

$A^t=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ και $AA^t=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ΑΡΑ A ορθογώνιος

Ομοίως σε $B=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix} \rightsquigarrow B^t=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$ και $BB^t=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} = I_n$ άρα B ορθογώνιος

#ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ# Ταυτίζοντας με τον φυσιολογικό τρόπο το $\mathbb{R}^n$ με το $\mathbb{R}^{n\times 1}$

Προκύπτει:

Ορθογώνιοι πίνακες είναι οι γραμμικές ισομετρίες του $\mathbb{R}^n$ με το κανονικό εσωτ. γινόμ.

#ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ# Είδαμε το Θεώρ. Euler περιγράφει όλες τις γραμμικές ισομετρίες του $\mathbb{R}^2$ (συνήθ. εσωτ. γιν.) και του $\mathbb{R}^3$ (συνήθ. εσωτ. γινόμ.)

ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ΤΑΕΙ

(i) A ορθογώνιος

(ii) Οι στήλες του A είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^{n\times 1}$ με το ΚΕΓ

(iii) Οι γραμμές —//— —//— του $\mathbb{R}^{1\times n}$ —//—

$\boxed{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$ (χωρίς απόδειξη)

<u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ</u> Από την πρόταση για $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ προκύπτει

A ορθ. $\iff$ $\underline{\underline{a^2+c^2=1}}$ / $\underline{\underline{b^2+c^2=1}}$ / $\underline{\underline{ab+cd=0}}$

<u>ΑΡΑ</u> $\theta\in\mathbb{R}$ $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$ ορθογώνιος (<u>πίνακας στροφής</u>)

<u>Αντίθετα</u>, ότι και να είναι $a,b\in\mathbb{R}$, ο πίνακας $\begin{bmatrix} 1 & a \\ 1 & b\end{bmatrix}$ δεν είναι ορθογώνιος γιατί το μήκος της πρώτης στήλης είναι $\sqrt{2}\neq 1$

<u>ΕΡΩΤΗΣΗ Για ποια $a,b\in\mathbb{R}$ είναι ο πίνακας $A=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & a \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & b\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ ορθογώνιος;</u>

ΑΠΑΝΤΗΣΗ Παρατηρούμε ότι η πρώτη στήλη του A είναι η $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ και

$$\left\| \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$$

(*) Για να είναι ο A ορθογώνιος πρέπει:

(i) μήκος δεύτερης στήλης $=1$, ισοδύναμα
(ii) Πρώτη και δεύτερη στήλη κάθετες, ισοδύναμα

$$\begin{cases} a^2+b^2=1 \\ \frac{a}{\sqrt{2}}+\frac{b}{\sqrt{2}}=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-b \\ a^2+a^2=1 \end{cases} \iff$$

$\iff \left(a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ή $\left(a=-\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

#ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ 1) Υπάρχουν ορθογώνιοι πίνακες που <u>δεν</u> είναι διαγωνιοποιήσιμοι επί του $\mathbb{R}$. Για πχ αν $A=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ τότε A ορθογώνιος με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) = \det(A - xI_2) = \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x\end{vmatrix} =$
$= x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ και δεν έχει ρίζες στο $\mathbb{R}$.

2) Δεν θα μας απασχολήσει αλλά ισχύει ότι αν $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ ορθογώνιος και τον δούμε σαν πίνακα στο $\mathbb{C}^{n\times n}$ τότε ο A είναι διαγωνιοποιήσιμος επί του $\mathbb{C}$.

ΑΡΑ → η (5) δίνει $\bar{\lambda}=\lambda \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

ΘΕΜ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΤΗΣ ΑΛΓΕΒΡΑΣ Κάθε μη σταθερό πολυώνυμο $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ έχει ρίζα στο $\mathbb{C}$

▶ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Τότε υπάρχει τουλάχιστον μία ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{R}$ του A.

▶ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμές του A με $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Τότε οι ιδιόχωροι $V_A(\lambda_1) = \{x \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = \lambda x\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$

$V_A(\lambda_2) = \{y \in \mathbb{R}^{n\times 1} : Ax = \lambda y\} \subseteq \mathbb{R}^{n\times 1}$

είναι ορθογώνιοι ως προς το κανονικό εσωτ. γινόμ. του $\mathbb{R}^{n\times 1}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Έστω $x \in V_A(\lambda_1)$ $y \in V_A(\lambda_2)$ Τότε $\begin{cases} Ax = \lambda_1 x & (1) \\ Ay = \lambda_2 y & (2) \end{cases}$

ΘΔΟ $\langle y, x \rangle = 0$ ισοδύναμα $x^t y = 0_{1\times 1}$

Αφού $\lambda_1 \neq \lambda_2$ τουλάχιστον ένα από τα λ_1, λ_2 είναι $\neq 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε $\lambda_1 \neq 0$. Έχουμε

$x^t y = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 x)^t y \overset{(1)}{=} \frac{1}{\lambda_1}(Ax)^t x \; (\frac{1}{\lambda_1}(x|Ax) \overset{(2)}{=} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} x^t x$ ↳ αντισυμμετρικός

$(1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}) x^t y = 0_{1\times 1}$ αλλά $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow x^t x = 0_{1\times 1}$

ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ συμμετρικός. Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ώστε $P^{-1}AP =$ Διαγώνιος (1)

(Άρα (1) A διαγώνιος

(2) Αφού P ορθογώνιος $P^{-1} = P^t$ επομένως η (1) γράφεται

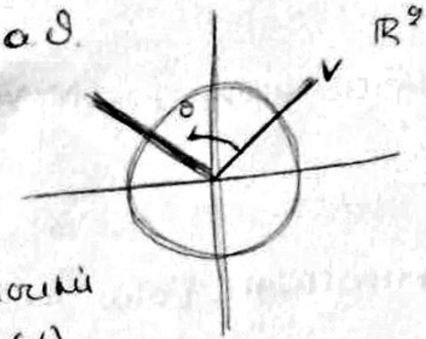
και $P^t AP =$ διαγώνιος

ΑΠΟΔΕΙΞΗ Από Θεμ. Θεώρημα Άλγεβρας ο A έχει ιδιοτιμή $\lambda \in \mathbb{C}$

Δείξαμε ότι $\lambda \in \mathbb{R}$ άρα υπάρχει $0 \neq v \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ που είναι ιδιοδιάνυσμα του A

Θέτουμε $L = \langle v \rangle, \; W = L^{\perp}$

Έστω $\theta \in (0,\pi]$ και $F: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ στροφή κατά γωνία θ.



ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ

Η F δεν έχει ιδιοτιμές στο $\mathbb{R}$

$\boxed{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$ Έστω ότι δεν ισχύει και υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ιδιοτιμή

Τότε υπάρχει $0 \neq v \in \mathbb{R}^2$ με $[F(v)] = \lambda v$ (1)

Αντίφαση γιατί το $F(v)$ έχει γωνία θ με το v και $\theta \in (0,\pi)$

Άρα το $F(v) \notin$ στην ευθεία που ορίζει το v, ενώ από την (1) ανήκει

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

*ΥΠΕΝΘΥΜΙΣΗ Αν $A \in F^{\nu \times \nu}$, ο A λέγεται συμμετρικός αν $A^t = A$

πχ $A = \begin{bmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{bmatrix}$ είναι συμμετρικός, ο $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ δεν είναι συμμετρικός

→ ΚΥΡΙΟΣ ΣΤΟΧΟΣ Ν.δ.ο. $A \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ συμμετρικός $\Rightarrow A$ διαγωνίσιμος επί του $\mathbb{R}$

!(ΠΡΟΣΟΧΗ)! Γενικά δεν ισχύει αν αλλάξουμε το $\mathbb{R}$ σε άλλο σώμα. Θα δούμε συμμετρικούς μιγαδικούς πίνακες που δεν είναι διαγωνίσιμοι/$\mathbb{C}$.

▶ΠΡΟΤΑΣΗ Έστω $A \in \mathbb{R}^{\nu \times \nu}$ συμμετρικός, με χαρακτηριστικό πολυώνυμο $\chi_A(x) \in \mathbb{R}[x]$. Αν $\lambda \in \mathbb{C}$ ρίζα του $\chi_A(x)$ τότε $\lambda \in \mathbb{R}$.

(Δηλαδή, κάθε ιδιοτιμή του A είναι πραγματική)

$\boxed{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$ Αφού $\lambda \in \mathbb{C}$ ιδιοτιμή υπάρχει $\omega \in \mathbb{C}^{\nu \times 1}$, $\omega \neq 0$ ώστε $A\omega = \lambda\omega$ (1)

$\Rightarrow \overline{(A\omega)} = \overline{(\lambda\omega)} \Rightarrow \bar{A}\bar{\omega} = \bar{\lambda}\bar{\omega} \Rightarrow A\bar{\omega} = \bar{\lambda}\bar{\omega}$ αφού $A \in \mathbb{R}^{\nu\times\nu}$

(1) $\Rightarrow (A\bar{\omega})^t \omega = (\bar{\lambda}\bar{\omega})^t \omega = \bar{\omega}^t(\bar{\lambda}\omega) = \bar{\lambda}\bar{\omega}^t\omega$

Άρα $(A\bar{\omega})^t \omega = \bar{\lambda}\bar{\omega}^t\omega$ (3)

Επίσης $(A\bar{\omega})^t\omega = \bar{\omega}^t A^t \omega \overset{A^t = A}{=} \bar{\omega}^t(A\omega) = \bar{\omega}^t(\lambda\omega) = \lambda\bar{\omega}^t\omega$ (4)

(3) + (4) $\Rightarrow \bar{\lambda}\bar{\omega}^t\omega - \lambda\bar{\omega}^t\omega = 0 \Rightarrow (\bar{\lambda} - \lambda)(\bar{\omega}^t\omega) = 0$ (5)

Αλλά $\omega \in \mathbb{C}^{\nu \times 1}$ μη μηδενικό $\Rightarrow \bar{\omega}^t\omega$ είναι ένας μη μηδενικός 1×1 πίνακας

ΙΣΧΥΡΙΣΜΟΣ W είναι A αναλλοίωτος δηλ. $w \in W \Rightarrow Aw \in W$

$\boxed{\text{ΑΠΟΔΕΙΞΗ}}$ $\langle v, Aw \rangle = (Aw)^t v = w^t A^t v \overset{A = A^t}{=\!=} w^t (Av) = w^t (\lambda v) = \lambda \langle v, w \rangle = 0 \in \mathbb{R}$

διότι $W = \langle v \rangle^{\perp}$

Άρα βλέπουμε ότι $A|_W$ είναι συμμετρικός και το συμπέρασμα

έπεται με επαγωγή

Ο P μπορεί επιλεγεί ορθογώνιος εφαρμόζοντας Gram-Schmidt

για τους ιδιοχώρους $V_A(\lambda_i)$ με την προηγούμενη πρόταση

που λέει ότι αν λ_1, λ_2 ιδιοτιμές του A με $\lambda_1 \neq \lambda_2$ τότε

$V_A(\lambda_1) \perp V_A(\lambda_2)$ ορθογώνια